Densité polynome orthogonaux.

I intervalle de $\mathbb{R}$

p fonction poids : (ie $\forall n \quad x^n p(x) \in L^1(I)$ et $p \geq 0$)

$L^2(p) = \{ f \,/\, \int |f|^2 p\, dx < +\infty \}$ $\quad \langle f, g \rangle_{L^2(p)} = \int_I f \bar{g}\, p\, dx$

On construit la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en appliquant le procédé de Gram-Schmidt sur la famille $(x \to x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ie $x^n \in L^2(p)$ par déf de p) pour le produit scalaire $\langle , \rangle_p$

Th :

$\exists \alpha > 0 \,/\, \int_I e^{\alpha |x|} p(x)\, dx < +\infty \Rightarrow (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base Hilbertienne de $L^2(p)$

preuve : $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormée par construction

Il reste à montrer $\overline{\mathrm{vect}(P_n)} = L^2(p)$

On $\overline{\mathrm{vect}(P_n)} = \overline{\mathrm{vect}(x_n)}$

Donc il suffit de montrer $\mathrm{vect}(x_n)^{\perp} = \{0\}$

Soit $f \in L^2(p)$, On pose $\varphi = f p \mathbb{1}_I$

et $f \in \mathrm{vect}(x_n)^{\perp}$ On cherche à montrer $f = 0$

Etape 1. $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$\forall t \geq 0 \quad t \leq (1 + t^2)$ (on applique en $|f(x)|$ puis $\times p(x)$)

d'où $\forall x \quad |f(x)| p(x) \leq (1 + |f(x)|^2) p(x)$

d'où $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| p(x)\, dx \leq \int_I p(x) + |f(x)|^2 p(x)\, dx < +\infty$

car $f \in L^2(p) \Leftrightarrow |f|^2 p \in L^1$

et $p \in L^1$

On peut donc poser $\hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x) e^{-i\omega x} p(x)\, dx$

Etape 2 : $\hat{\varphi}$ admet un prolongement holomorphe sur B_α

où $B_\alpha = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(z) < \frac{\alpha}{2} \}$

On pose $g(z,x) = f(x)p(x)e^{-izx}$

$\forall z \in B_\alpha$, $g(z,x) \in L^1$ $\qquad e^{-iax+bx} = |e^{iax} \dots|$

En effet $\forall z \in B_\alpha$

$$\int_I |g(z,x)| = \int_I |f(x)||e^{-izx}| p(x)\,dx$$

$$= \int_I |f(x)||e^{\mathrm{Im}(z)x}| p(x)\,dx$$

$$\leq \int_I |f(x)| e^{\frac{\alpha}{2}|x|} p(x)\,dx$$

C.S

$$\leq \left(\int_I e^{\alpha|x|} p(x)\right)^{1/2} \left(\int |f(x)|^2 p(x)\,dx\right)^{1/2}$$

$< +\infty$ hyp sur p $< +\infty$ $f \in L^2(p)$

On définit alors $F(z) = \int_I g(z,x)\,dx$

On remarque F coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$

- $\forall z \in B_\alpha$, $x \to g(z,x)$ mesurable
- pour presque tout $x \in I$ $z \to g(x,z)$ holomorphe
- $\forall z \in B_\alpha$ $|g(z,x)| \leq e^{\frac{\alpha}{2}|x|} |f(x)| p(x)$

Donc d'après théorème d'holomorphie

on a $F^{(n)}(z) = (-i)^n \int x^n e^{-ixz} f(x)p(x)\,dx$

En particulier $F^{n}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)p(x)\,dx = (-i)^n \langle x^n, f\rangle_p$

Par l'unicité du DSE on a $F = 0$ sur un voisinage de 0

Donc par prolongement analytique $F = 0$ sur B_α (connexe)

Et ainsi $\hat{\varphi} = 0$ car la transformée de Fourier est injective

sur L^1 et $\varphi \in L^1$ d'où $\varphi = 0$

or $p(x) > 0$ donc $f(x) = 0$ pour presque tout x